



TITLE:

Asymptotic stability and uniform asymptotic stability for second-order linear differential equations with damping (Modeling and Complex analysis for functional equations)

AUTHOR(S):

鬼塚, 政一

CITATION:

鬼塚, 政一. Asymptotic stability and uniform asymptotic stability for second-order linear differential equations with damping (Modeling and Complex analysis for functional equations). 数理解析研究所講究録 2008, 1582: 151-160

ISSUE DATE:

2008-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81444>

RIGHT:

Asymptotic stability and uniform asymptotic stability for second-order linear differential equations with damping

島根大学 総合理工学研究科 鬼塚政一 (Masakazu Onitsuka)

Department of Mathematics
Shimane University

1 序文

減衰項をもつ 2 階線形微分方程式

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (E)$$

を考える. ただし, 係数 $a(t), b(t)$ は $t > 0$ において連続微分可能な関数とする. このとき, 方程式 (E) のすべての解は時間大域的に存在し, 方程式 (E) は平衡点 $x = x' = 0$ をもつ.

これまで多くの研究者によって, 2 階微分方程式の平衡点が uniformly asymptotically stable や asymptotically stable であるための十分条件の研究がなされてきた [2, 6, 7, 9, 10]. 方程式 (E) の係数 $a(t), b(t)$ がいずれも定数または周期関数である場合は平衡点の uniform asymptotic stability と asymptotic stability が一致する. それ等の定義から分かるように, 一般に, uniformly asymptotically stable ならば, asymptotically stable である. ところが, asymptotically stable であるからといって uniformly asymptotically stable とは限らない. その例を次に示す. 方程式

$$x'' + \frac{2}{1+t}x' + x = 0 \quad (1.1)$$

を考える. このとき, 方程式 (1.1) の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable であるが, uniformly asymptotically stable でない. 実際, 方程式 (1.1) の基本解行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin t}{1+t} & \frac{\cos t}{1+t} \\ \frac{\cos t}{1+t} - \frac{\sin t}{(1+t)^2} & -\frac{\sin t}{1+t} - \frac{\cos t}{(1+t)^2} \end{pmatrix}.$$

であるから, Coppel の定理 [1] を用いてこの事実を確認できる. この例が示すように, uniform asymptotic stability と asymptotic stability の間には隔たりがある. ところが, それらの差に関する研究はこれまで殆どなされてこなかった. すなわち, 平衡点の non-uniform asymptotic stability に関する研究は数少ない. そこで, 本研究では方程式 (E) の non-uniform asymptotic stability に焦点を当て, 議論を展開する.

以後、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が asymptotically stable であるための十分条件とその例をいくつか紹介する。非負値関数 $\phi(t)$ が integrally positive であるとは、ある $\omega > 0$ に対して $\tau_n + \omega \leq \sigma_n \leq \tau_{n+1}$ をみたす任意の集合 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n, \sigma_n]$ において

$$\int_I \phi(t) dt = \infty$$

となることをいう ([3-6, 8, 9, 11] を見よ)。さらに、 I の条件に加えて

$$\tau_{n+1} \leq \sigma_n + \Omega$$

をみたす $\Omega > 0$ が存在するとき、 $\phi(t)$ は weakly integrally positive であるという ([5, 9] を参照)。例えば、 $1/(1+t)$ や $\sin^2 t/(1+t)$ は weakly integrally positive であるが、integrally positive でない。

Sugie and Onitsuka [9] は方程式 (E) を含む 2 階半分線形微分方程式の Global asymptotic stability について考察した。方程式 (E) に対する結果を次に記載する。

定理 A. ある数 $\bar{a}, \bar{b}, \underline{b} > 0$ が存在し、任意の $t > 0$ に対して

$$|a(t)| \leq \bar{a} \quad (1.2)$$

かつ

$$\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b} \quad (1.3)$$

が成り立つと仮定とする。このとき、関数 $2a(t)b(t) + b'(t)$ が非負で weakly integrally positive ならば、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable。

定理 A を用いれば、方程式

$$x'' + \frac{1}{1+t} x' + x = 0 \quad (E-1)$$

の平衡点 $x = x' = 0$ が asymptotically stable であることがわかる。実際、 $a(t) = 1/(1+t)$ は有界で $b(t) = 1$ より、条件 (1.2) と (1.3) をみたす。また

$$2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{2}{1+t}$$

であるから、 $2a(t)b(t) + b'(t)$ は非負で weakly integrally positive となる。したがって、定理 A の条件をすべて満足するので、方程式 (E-1) の平衡点は asymptotically stable である。

次に、Duc 等 [2] が与えた方程式 (E) の平衡点が asymptotically stable であるための十分条件を紹介する。

定理 B. 条件 (1.2) と

$$\int_0^{\infty} b(t) dt = \infty \quad (1.4)$$

を満足すると仮定する。このとき、ある数 $\bar{b}, K, k > 0$ が存在し、任意の $t > 0$ に対して

$$0 < b(t) \leq \bar{b}, \quad (1.5)$$

$$|a'(t)| \leq Kb(t) \quad \text{かつ} \quad kb^2(t) \leq 2a(t)b(t) + b'(t) \quad (1.6)$$

が成り立つならば、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable。

彼らは、方程式

$$x'' + \frac{1}{1+t}x' + \frac{1}{1+t}x = 0 \quad (E-2)$$

を例に挙げている。係数 $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ であるから、条件 (1.2), (1.4) そして (1.5) は明らかに成立する。また、 $K = k = 1$ と選べば

$$|a'(t)| = \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{1+t} = Kb(t) \quad \text{かつ} \quad kb^2(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = 2a(t)b(t) + b'(t)$$

となるので、条件 (1.6) を満足する。よって、(E-2) の平衡点は asymptotically stable である。

以上のことをまとめると、方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は asymptotically stable であることがわかった。それでは、これ等の平衡点は uniformly asymptotically stable であるのか？

Ignatyev [7] は uniformly asymptotically stable であるための十分条件を与えた。

定理 C. 条件 (1.2) と (1.3) をみたすとする。このとき、 $L, l > 0$ が存在し、任意の $t > 0$ に対して

$$|b'(t)| \leq L \quad \text{かつ} \quad l \leq 2a(t)b(t) + b'(t) \quad (1.7)$$

が成り立つならば、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は uniformly asymptotically stable.

定理 C を方程式 (E-1) と (E-2) にそれぞれ適用できるかどうかを確認する。まず、方程式 (E-1) において $a(t) = 1/(1+t)$, $b(t) = 1$ であるから、条件 (1.2) と (1.3) を満足する。ところが、 $b'(t) = 0$ より、 $2a(t)b(t) + b'(t) = 2/(1+t)$ となるから、(1.7) をみたす $l > 0$ を選ぶことができない。よって、定理 C は方程式 (E-1) に適用できない。一方、方程式 (E-2) において $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ である。このとき、条件 (1.2) を満足するが、(1.3) をみたさない。よって、定理 C は方程式 (E-2) にも適用できない。それでは、方程式 (E-1) や (E-2) の平衡点は uniformly asymptotically stable でないのか？この問いに答えるため、本研究では、変数係数をもつ damped linear oscillator の平衡点が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与えることを目的とする。

次節では、方程式 (E) の平衡点が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与える。その証明には、リヤプノフの手法を用いる。また、方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点が uniformly asymptotically stable であるか否か？の問いに答えを与える。最終節では、方程式 (E) の平衡点が asymptotically stable かつ non-uniformly asymptotically stable であるための十分条件をいくつか与え、応用を示す。

2 非一様漸近安定性

本節では、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が uniformly asymptotically stable でないための十分条件を与える。便宜上、初期時刻 $t_0 > 0$ とし、初期条件 $(x(t_0; t_0, x_0, x'_0), x'(t_0; t_0, x_0, x'_0)) = (x_0, x'_0)$ をみたす方程式 (E) の解とその導関数をそれぞれ $x(t; t_0, x_0, x'_0)$, $x'(t; t_0, x_0, x'_0)$ と表す。線形微分方程式において、uniformly asymptotically stable と exponential asymptotically stable は同値であることが知られている (例えば, [1] を見よ)。本節

では、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が *uniformly asymptotically stable* でないことを示す代わりに、*exponential asymptotically stable* でないことを示す。本研究で得られた定理を紹介する。

定理 2.1. 係数 $a(t), b(t)$ は

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \leq 0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} b(t) \quad (2.1)$$

かつ

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (2a^2(t) + a'(t)) \geq 0 \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} (2a(t)b(t) + b'(t)) \quad (2.2)$$

をみたすとする。このとき、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *uniformly asymptotically stable* でない。

証明. 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が *uniformly asymptotically stable* でないことを証明するため、任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して、ある数 $\delta(\varepsilon) > 0$ と数列 $\{\tau_n\}, \{t_n\}$ 及び点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ が存在し、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau_n > 0, \quad t_n \geq \tau_n$$

かつ

$$|\xi_n| + |\eta_n| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

をみたし

$$|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| \geq \delta e^{-\varepsilon(t_n - \tau_n)}$$

が成り立つことを示す。

変数変換 $z = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x$ を行えば、方程式 (E) は方程式

$$z'' + (-\varepsilon + a(t))z' + \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon a(t)}{2} + b(t) \right) z = 0$$

になる。この方程式は方程式系

$$\begin{aligned} z' &= w, \\ w' &= -g(t)z - h(t)w \end{aligned} \quad (S)$$

に書き換えられる。ただし、 $g(t) = \varepsilon^2/4 - \varepsilon a(t)/2 + b(t)$, $h(t) = -\varepsilon + a(t)$ である。条件 (2.1) と (2.2) を使うと、ある数 $T(\varepsilon) > 0$ が存在し、 $t \geq T$ に対して

$$a(t) \leq \frac{\varepsilon^3}{10}, \quad b(t) \geq -\frac{\varepsilon^3}{10}, \quad 2a^2(t) + a'(t) \geq -\frac{\varepsilon^3}{10}, \quad 2a(t)b(t) + b'(t) \leq \frac{\varepsilon^3}{10}$$

を満足する。したがって、 $0 < \varepsilon < 1$ であることを考慮すると、 $t \geq T$ に対して

$$g(t) \geq \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^4}{20} - \frac{\varepsilon^3}{10} > \frac{\varepsilon^2}{10} \quad (2.3)$$

かつ

$$\begin{aligned}
 2g(t)h(t) + g'(t) &= -\frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{3\varepsilon^2 a(t)}{2} - \frac{\varepsilon}{2} (2a^2(t) + 4b(t) + a'(t)) \\
 &\quad + 2a(t)b(t) + b'(t) \\
 &\leq -\frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{3\varepsilon^5}{20} + \frac{\varepsilon^3}{4} + \frac{\varepsilon^3}{10} < 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

が成り立つ。

さて, $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon/3\sqrt{10}$ とし, 点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ と数列 $\{\tau_n\}, \{t_n\}$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\xi_n = \eta_n = e^{-\frac{\varepsilon}{2}(n+T)}, \quad \tau_n = n + T, \quad t_n = 2(n + T) \tag{2.5}$$

とおく. 初期時刻 $\tau_n > T$ からはじまり, 初期条件 $(x(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n), x'(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)) = (\xi_n, \eta_n)$ を満足する方程式 (E) の解とその導関数を用いて, 関数

$$z_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t} x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n), \quad w_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t} \left(\frac{\varepsilon}{2} x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n) + x'(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n) \right)$$

とすれば, (2.5) より, $(z_n(t), w_n(t))$ は初期条件 $(z_n(\tau_n), w_n(\tau_n)) = (1, \varepsilon/2 + 1)$ をみたす方程式系 (S) の解になる. 方程式系 (S) に対するリヤプノフ関数として

$$V(t, z, w) = z^2 + \frac{w^2}{g(t)}$$

を考える. 不等式 (2.4) より, 方程式系 (S) の解に沿った微分は $t \geq \tau_n$ において

$$\dot{V}_{(S)}(t, z, w) = -\frac{2g(t)h(t) + g'(t)}{g^2(t)} w^2 \geq 0$$

をみたす. 簡単のため, $v_n(t) = V(t, z_n(t), w_n(t))$ と書く. このとき, $v'_n(t) \geq 0$ であるから, 評価 (2.3) と $0 < \varepsilon < 1$ より, $t \geq \tau_n$ に対して

$$\begin{aligned}
 1 &< 1 + \frac{(\varepsilon/2 + 1)^2}{g(\tau_n)} = v_n(\tau_n) \leq v_n(t) = z_n^2(t) + \frac{w_n^2(t)}{g(t)} \\
 &\leq z_n^2(t) + \frac{10w_n^2(t)}{\varepsilon^2} \leq \frac{10}{\varepsilon^2} (z_n^2(t) + w_n^2(t))
 \end{aligned}$$

がわかる. したがって, $t \geq \tau_n$ に対して, 不等式

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} < \sqrt{z_n^2(t) + w_n^2(t)} \leq |z_n(t)| + |w_n(t)|$$

が成り立つ. さらに (2.5) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ において

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} &< |z_n(t_n)| + |w_n(t_n)| \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 \right) |x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| \right\} \\
 &\leq \frac{3}{2} e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n} (|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)|)
 \end{aligned}$$

を得る. この不等式を整理すれば, 不等式

$$|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| > \delta e^{-\frac{\varepsilon}{2} t_n} = \delta e^{-\varepsilon(t_n - \tau_n)}$$

が成り立つ. 故に, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *uniformly asymptotically stable* でない. \square

定理 2.1 を方程式 (E-1) と (E-2) に適用できるかどうかをそれぞれ確認する. まず, 方程式 (E-1) において $a(t) = 1/(1+t)$, $b(t) = 1$ であるから, 条件 (2.1) を満足する. また

$$2a^2(t) + a'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{かつ} \quad 2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{2}{1+t}$$

なので, 条件 (2.2) もみたす. よって, 方程式 (E-1) の平衡点は *uniformly asymptotically stable* でない. 次に, 方程式 (E-2) において $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ であるから, 明らかに, 条件 (2.1) はみたされる. また, $a'(t) = b'(t) = -1/(1+t)^2$ より

$$2a^2(t) + a'(t) = 2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

となるので, 条件 (2.2) を満足する. 故に, (E-2) の平衡点は *uniformly asymptotically stable* でない. 上記のことをまとめると方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は *asymptotically stable* であつ *uniformly asymptotically stable* でないことがわかった.

ここで, 新たな疑問が生じる. 方程式 (E-1) と (E-2) に類似したタイプの方程式

$$x'' + x' + \frac{1}{1+t}x = 0 \tag{E-3}$$

の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* であることが定理 B により判定できるが, それでは, その平衡点は *not uniformly asymptotically stable* なのか否か? 実際に, 定理 C の条件を方程式 (E-3) が満足するかどうか確認する. 係数 $b(t) = 1/(1+t)$ であることから, 条件 (1.3) を満足する $b > 0$ を選ぶことができないので, 定理 C は適用できない. 次に, 定理 2.1 の条件を確認する. 係数 $a(t) = 1$ であることから, 条件 (2.1) をみたさない. したがって, これまでの定理では方程式 (E-3) の平衡点が *uniformly asymptotically stable* であるかどうかは判定できない. ところが, それに答えを与える定理を得ることができた. 以下に記載する.

定理 2.2. ある正の数 $\underline{a} > 0$ が存在し, 任意の $t > 0$ に対して

$$a(t) \geq \underline{a} \tag{2.6}$$

と仮定する. このとき

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} b(t) \leq 0 \tag{2.7}$$

ならば, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *uniformly asymptotically stable* でない.

証明. 任意の $0 < \varepsilon < \underline{a}$ に対して, 変数変換 $z = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x, w = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}(\varepsilon x/2 + x')$ を行えば, 定理 2.1 の証明と同様に方程式 (E) は方程式系 (S) に書き換えられる. 条件 (2.7) より, ある数 $T(\varepsilon) \geq 0$ が選べ, $t \geq T$ に対して

$$b(t) \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

となるから, (2.6) と併せて考えれば, $t \geq T$ において

$$g(t) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\underline{a}\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon - \underline{a}) < 0 \quad \text{かつ} \quad h(t) \geq -\varepsilon + \underline{a} > 0$$

が成り立つ. このとき, z -軸の正の部分におけるベクトル場は

$$z' = 0 \quad \text{かつ} \quad w' = -g(t)z > 0$$

であり, w -軸の正の部分におけるベクトル場は

$$z' > 0 \quad \text{かつ} \quad w' = -h(t)w < 0$$

となるから, T 以降の時刻で第 1 象限内に入る方程式系 (S) の解は $t \geq T$ において第 1 象限内に留まることになる.

さて, $\delta(\varepsilon) = 1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, (2.5) をみたす点列 $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ と数列 $\{\tau_n\}$ 及び $\{t_n\}$ を作る. 初期時刻 $\tau_n > T$ から始まり, 初期条件 $(x(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n), x'(\tau_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)) = (\xi_n, \eta_n)$ を満足する方程式 (E) の解とその導関数を用いて関数

$$z_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n), \quad w_n(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\left(\frac{\varepsilon}{2}x(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n) + x'(t; \tau_n, \xi_n, \eta_n)\right)$$

とおく. このとき, (2.5) より, $(z_n(t), w_n(t))$ は初期条件 $(z_n(\tau_n), w_n(\tau_n)) = (1, \varepsilon/2 + 1)$ をみたす方程式系 (S) の解になる. 関数 $W(z) = z^2$ を考えると, 方程式系 (S) の解に沿った微分は

$$\dot{W}_{(S)}(z, w) = 2zw$$

である. 簡単のため, $w_n(t) = W(z_n(t))$ と表す. $(z_n(\tau_n), w_n(\tau_n)) = (1, \varepsilon/2 + 1)$ は第 1 象限内の点であることから, 方程式系 (S) の解 $(z_n(t), w_n(t))$ は $\tau_n > T$ 以降の時刻で第 1 象限内に留まることになるので, $t \geq \tau_n$ において

$$w'(t) = 2z_n(t)w_n(t) > 0$$

が成り立つ. したがって, (2.5) より, $t \geq \tau_n$ に対して

$$1 = z_n^2(\tau_n) = w_n(\tau_n) \leq w_n(t) = z_n^2(t)$$

をみたす. $t_n > \tau_n$ より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$1 \leq |z_n(t_n)| = e^{\frac{\varepsilon}{2}t_n}|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)|$$

であるから、不等式

$$|x(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| + |x'(t_n; \tau_n, \xi_n, \eta_n)| \geq \delta e^{-\frac{\epsilon}{2} t_n} = \delta e^{-\epsilon(t_n - \tau_n)}$$

が得られる。故に、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は uniformly asymptotically stable でない。□

方程式 (E-3) の平衡点が not uniformly asymptotically stable であるかどうかを確認する。 $a(t) = 1$ であるから、条件 (2.6) をみたとす。また、 $b(t) = 1/(1+t)$ より、 $b(t)$ は 0 に漸近するので、条件 (2.7) を満足する。故に、方程式 (E-3) の平衡点は uniformly asymptotically stable でない。以上のことから方程式 (E-3) の平衡点は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable であることがわかった。

3 定理の応用

前節において、方程式 (E-1)–(E-3) の平衡点 $x = x' = 0$ がいずれも asymptotically stable であるが、uniformly asymptotically stable でないことがわかった。第 3 節では、これ等 3 つの例に限らず、より一般的な定理 2.1–2.3 の応用を示す。

定理 2.1 と定理 A を併せることにより、次の系が得られる。

系 3.1. 条件 (1.2), (1.3), (2.1) 及び (2.2) をみたと仮定する。このとき、関数 $2a(t)b(t) + b'(t)$ が非負で weakly integrally positive ならば、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable。

証明. 定理 2.1 と定理 A のすべての条件を満足するので明らかである。□

この系は応用上有用な Bessel の微分方程式

$$(1+t)^2 x'' + (1+t)x' + \{(1+t)^2 - n^2\}x = 0, \quad n \in \mathbb{R} \quad (B)$$

に適用できる。Bessel の微分方程式の両辺を $(1+t)^2 > 0$ で割れば

$$a(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{かつ} \quad b(t) = 1 - \frac{n^2}{(1+t)^2}$$

なので、条件 (1.2), (1.3) と (2.1) を満足する。また

$$2a^2(t) + a'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{かつ} \quad 2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{2}{1+t}$$

となるから、(2.2) もみたす。さらに、関数 $2a(t)b(t) + b'(t)$ は非負で weakly integrally positive である。よって、系 3.1 より方程式 (B) の平衡点 $x = x' = 0$ は asymptotically stable かつ not uniformly asymptotically stable。

定理 2.1 と定理 B を用いることにより、以下を得る。

系 3.2. 条件 (1.4)–(1.6) を満足すると仮定する. このとき, 条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2a(t)b(t) + b'(t)) = 0 \quad (3.1)$$

ならば, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable*.

証明. 条件 (3.1) ならば, (1.2) が成り立つので, 条件 (1.4)–(1.6) と合わせて考えると, 定理 B のすべての条件を満足する. よって, 平衡点は *asymptotically stable*. また, 条件 (1.6) と条件 (3.1) より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |a'(t)| = 0$$

となるので, 条件 (2.1) と (2.2) を満足する. 故に, 定理 2.1 を用いれば, 平衡点は *uniformly asymptotically stable* でない. \square

系 3.2 は 方程式 (E-2) に適用できる. 実際, $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ より

$$2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

となるので, 条件 (1.4), (1.5) そして (3.1) を満足する. また, $K = k = 1$ とすれば, 序文でも述べたように条件 (1.6) も成り立つ. 故に, 方程式 (E-2) の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable*.

定理 2.2 と定理 B を併せることにより, 次の系が得られる.

系 3.3. 条件 (1.2), (1.4)–(1.6), (2.6), (2.7) をみたすと仮定する. このとき, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable*.

証明. 明らかに, 定理 2.2 と定理 B の条件を満足する. 故に, 平衡点は *asymptotically stable* かつ *not uniformly asymptotically stable*. \square

参考文献

- [1] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965. MR0190463 (32 #7875)
- [2] L. H. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund and P. Taraba, On stability of linear time-varying second-order differential equations, *Quart. Appl. Math.* 64 (2006), no. 1, 137–151. MR2211381 (2006m:34126)
- [3] A. F. Güvenilir and A. O. Çelebi, A note on asymptotic stability of a class of functional differential equations. B. N. Prasad birth centenary commemoration volume, II, *Differential Equations Dynam. Systems* 2 (1994), no. 3, 173–204. MR1795826 (2001i:34127)

- [4] L. Hatvani, Attractivity theorems for non-autonomous systems of differential equations, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 40 (1978), no. 3-4, 271–283. MR0515208 (80d:34064)
- [5] L. Hatvani, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, *Nonlinear Anal.* 25 (1995), 991–1002. MR1350721 (96k:34105)
- [6] L. Hatvani, The effect of damping on the stability properties of the equilibria of nonautonomous systems, (Russian) *Prikl. Mat. Mekh.* 65 (2001), no. 4, 725–732; translation in *J. Appl. Math. Mech.* 65 (2001), no. 4, 707–713. MR1883809 (2002h:34097)
- [7] A. O. Ignatyev, Stability of a linear oscillator with variable parameters, *Electron. J. Differential Equations* 1997, no. 17, 6 pp. (electronic). MR1476064 (98i:34076)
- [8] V. M. Matrosov, On the stability of motion, *J. Appl. Math. Mech.* 26 1963 1337–1353. MR0153934 (27 #3895)
- [9] J. Sugie and M. Onitsuka, Global asymptotic stability for damped half-linear differential equations, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, in press.
- [10] J. Sugie, M. Onitsuka and A. Yamaguchi, Asymptotic behavior of solutions of nonautonomous half-linear differential systems, *Studia Sci. Math. Hungar.* 44 (2007), no. 2, 159–189. MR2325518
- [11] B. Zhang, Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear damped wave equation, *Differential Equations Dynam. Systems* 2 (1994), no. 3, 173–204. MR1386268 (97d:35152)